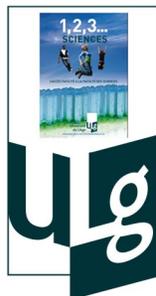


---

Université  
de Liège



# *1, 2, 3... Sciences*

*Année académique 2014-2015*

---

QUESTIONNAIRE ET CORRIGÉ  
EXAMEN DE MATH B DU 17 AOÛT 2015  
CHIMISTES, GÉOGRAPHES, INFORMATIENS ET PHYSIENS

---

---

---

## QUESTIONNAIRE

---

---

1. On donne la fonction  $f$  par  $f(x) = \sqrt{1 - 8x^2}$ .
- Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
  - Dans un même repère orthonormé, au voisinage de 0, représenter le graphique de  $f$  et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.
2. a) Soient les matrices  $A$ ,  $B$  et  $X$  données par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

- Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de  $B$ .
  - La matrice  $B$  est-elle diagonalisable? Pourquoi? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
  - Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec  $B$ ? Justifier.
  - Montrer **directement** que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda_0$  et donner la valeur de  $\lambda_0$ .
- b) Pour inciter des enfants malades à manger des fruits, un hôpital oblige ses jeunes patients à manger, chaque jour, un fruit sur les trois qu'elle propose (abricot, fraise, pomme). D'un jour à l'autre, les enfants peuvent changer de choix.
- Ayant choisi une pomme, un enfant a deux chances sur trois de manger des fraises et une chance sur trois de prendre des abricots le lendemain.
  - S'il a mangé des fraises, le jour suivant, il a une chance sur trois d'en encore en manger, une chance sur trois de manger une pomme et une chance sur trois de choisir des abricots.
  - Enfin, s'il a mangé des abricots un jour, il a une chance sur quatre de manger une pomme et trois chances sur quatre de manger des fraises le lendemain.
- Déterminer la matrice de transition.
  - Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un enfant mange des fraises.
3. a) On donne la fonction  $f$  par

$$f(x, y) = \sqrt{\arcsin(xy)}.$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
- Dans ce domaine, simplifier au maximum l'expression  $x D_x f(x, y) - y D_y f(x, y)$ .

- b) On donne l'ensemble borné fermé  $A$  suivant

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right], y \in [\sqrt{1 - x^2}, x] \right\}.$$

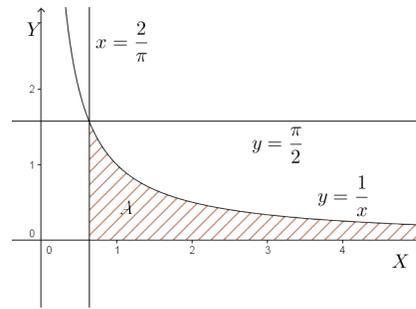
- Représenter l'ensemble  $A$  dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Ecrire l'intégrale double suivante de deux façons différentes en permutant l'ordre d'intégration puis, si elle existe, en déterminer sa valeur.

$$\iint_A xy \, dx \, dy.$$

- En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, comment se transforme l'expression de l'intégrale sur  $A$  de  $f : (x, y) \mapsto xy$ ?

4. On donne l'ensemble hachuré  $A$  ci-contre.  
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_A \frac{\cos(y)}{x^2} dx dy.$$



5. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m^2 + 3}{m + 3}, \quad (ii) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k!}, \quad (iii) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}}.$$

---

---

CORRIGÉ

---

---

**Exercices**

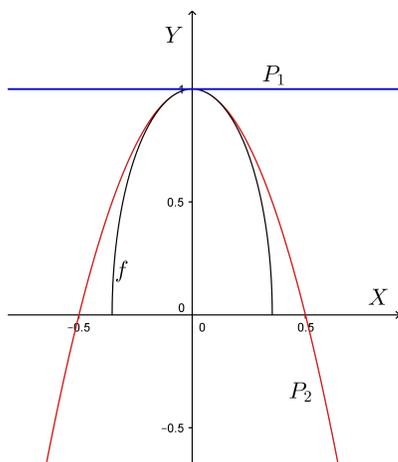
1. On donne la fonction  $f$  par  $f(x) = \sqrt{1 - 8x^2}$ .
- a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
- b) Dans un même repère orthonormé, au voisinage de 0, représenter le graphique de  $f$  et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs. .

*Solution.* La fonction est infiniment dérivable sur  $]-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}[$  et on a

$$Df(x) = \frac{-8x}{\sqrt{1-8x^2}}, \quad D^2f(x) = \frac{-8}{\sqrt{(1-8x^2)^3}}.$$

Comme  $f(0) = 1$ ,  $Df(0) = 0$  et  $D^2f(0) = -8$ , si on note  $P_n(x)$  l'approximation polynomiale de  $f$  à l'ordre  $n$  en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - 4x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$



2. a) Soient les matrices  $A$ ,  $B$  et  $X$  données par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

- Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de  $B$ .

*Solution.* La matrice  $B$  est inversible si et seulement si  $\det B \neq 0$ . Comme  $\det B = -9$ , la matrice  $B$  est donc inversible.

La matrice des cofacteurs de  $B$  étant égale à

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

l'inverse de  $B$  est la matrice

$$B^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice  $B$  est-elle diagonalisable? Pourquoi? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

*Solution.* Les valeurs propres de  $B$  sont les zéros du polynôme  $\left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{array} \right| = \lambda^2 - 9$ . La matrice  $B$  possède donc deux valeurs propres simples,  $-3$  et  $3$ ; elle est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre  $-3$  sont les vecteurs non nuls  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tels que

$$(B + 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre  $-3$  sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

où  $c$  est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre  $3$  sont les vecteurs non nuls  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tels que

$$(B - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre  $3$  sont donc des vecteurs du type

$$c' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où  $c'$  est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice inversible  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  est telle que  $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec  $B$ ? Justifier.

*Solution.* Comme  $B$  est une matrice de dimension 2, toute matrice qui commute avec  $B$  est aussi de dimension 2.

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c$  et  $d \in \mathbb{C}$ . On a

$$BM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 4a - c & 4b - d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b & 2a - b \\ c + 4d & 2c - d \end{pmatrix}.$$

Dès lors,  $BM = MB$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = a + 4b \\ 4a - c = c + 4d \\ b + 2d = 2a - b \\ 4b - d = 2c - d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ 2(a - d) = c \\ a - d = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ d = a - b \end{cases}$$

On conclut que la forme générale des matrices qui commutent avec  $B$  est donnée par  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a - b \end{pmatrix}$  avec  $a$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

- Montrer directement que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda_0$  et donner la valeur de  $\lambda_0$ .

*Solution.* Par définition, un vecteur non nul  $X$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda_0$  si  $AX = \lambda_0 X$ . Comme

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix},$$

$X$  est bien un vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $-1$ .

**b) Pour inciter des enfants malades à manger des fruits, un hôpital oblige ses jeunes patients à manger, chaque jour, un fruit sur les trois qu'elle propose (abricot, fraise, pomme). D'un jour à l'autre, les enfants peuvent changer de choix.**

**- Ayant choisi une pomme, un enfant a deux chances sur trois de manger des fraises et une chance sur trois de prendre des abricots le lendemain.**

**- S'il a mangé des fraises, le jour suivant, il a une chance sur trois d'encore en manger, une chance sur trois de manger une pomme et une chance sur trois de choisir des abricots.**

**- Enfin, s'il a mangé des abricots un jour, il a une chance sur quatre de manger une pomme et trois chances sur quatre de manger des fraises le lendemain.**

**(i) Déterminer la matrice de transition.**

*Solution.* Soient  $P_0, F_0$  et  $A_0$  respectivement le type de fruit (pomme, fraise, abricot) choisi pour un jour fixé au départ et  $P_1, F_1$  et  $A_1$  respectivement le type de fruit choisi le jour suivant. On a donc

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ F_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 & 3/4 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ F_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition  $T$  est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 & 3/4 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un enfant mange des fraises.**

*Solution.* Puisque  $T$  est une matrice régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les

vecteurs non nuls  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que

$$\begin{aligned} (T - I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/4 \\ 2/3 & -2/3 & 3/4 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 4y + 3z = 0 \\ 8x - 8y + 9z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 8y = -9z \\ x + y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 8y = -9z \\ 8x + 8y = 24z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15z}{16} \\ y = \frac{33z}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16}z \\ \frac{33}{16}z \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ 16 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme  $c(15 + 33 + 16) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{64}$ , le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{33}{64} \\ \frac{16}{64} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'un enfant mange des fraises à long terme est de  $33/64$ .

3. a) On donne la fonction  $f$  par

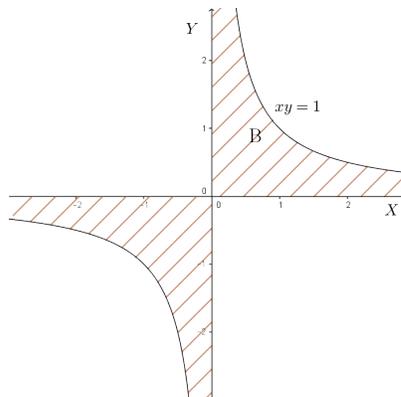
$$f(x, y) = \sqrt{\arcsin(xy)}.$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

*Solution.* Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction  $f$  est égal à

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin(xy) > 0, -1 < xy < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points de l'hyperbole d'équation cartésienne  $xy = 1$ , ainsi que ceux des axes, sont exclus de l'ensemble.



- Dans ce domaine, simplifier au maximum l'expression  $x D_x f(x, y) - y D_y f(x, y)$ .

*Solution.* En un point  $(x, y)$  de  $B$  on a

$$(D_x f)(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \quad \text{et} \quad (D_y f)(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

L'expression donnée est donc nulle puisque

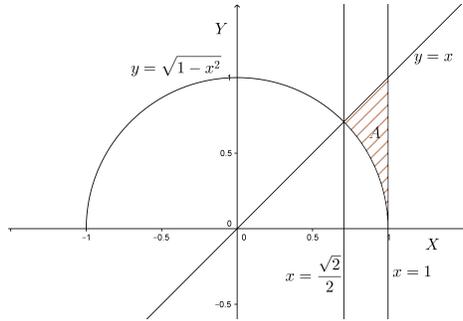
$$x D_x f(x, y) - y D_y f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(xy)}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = 0.$$

b) On donne l'ensemble borné fermé  $A$  suivant

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right], y \in [\sqrt{1-x^2}, x] \right\}.$$

- Représenter l'ensemble  $A$  dans un repère orthonormé en le hachurant.

*Solution.*



Les points des “bords” sont compris dans l’ensemble.

- Ecrire l’intégrale double suivante de deux façons différentes en permutant l’ordre d’intégration puis, si elle existe, en déterminer sa valeur.

$$\iint_A xy \, dx \, dy.$$

*Solution.* D’une part,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right], y \in [\sqrt{1-x^2}, x] \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[ 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right], x \in [\sqrt{1-y^2}, 1] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right], x \in [y, 1] \right\}. \end{aligned}$$

D’autre part, la fonction  $f : (x, y) \mapsto xy$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  donc sur  $A$ , ensemble borné fermé; elle y est intégrable.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \iint_A xy \, dx \, dy &= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left( \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 xy \, dx \right) dy + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left( \int_y^1 xy \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

On calcule ensuite la valeur de l’intégrale et on a

$$\begin{aligned} \iint_A xy \, dx \, dy &= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy \right) dx \\ &= \int_{\sqrt{2}/2}^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^x dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}/2}^1 x (2x^2 - 1) dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}/2}^1 (2x^3 - x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{1}{4} [x^2(x^2 - 1)]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

- En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, comment se transforme l’expression de l’intégrale sur  $A$  de  $f : (x, y) \mapsto xy$  ?

*Solution.* Puisque  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4})$ , que le rayon de l’arc de cercle vaut 1 et vu la relation liant les deux côtés d’un triangle rectangle, l’ensemble  $A$  exprimé en coordonnées polaires est

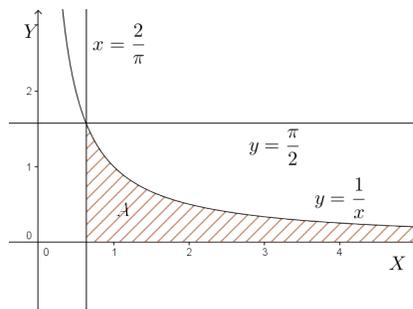
$$A' = \left\{ (r, \theta) : \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right], r \in \left[ 1, \frac{1}{\cos(\theta)} \right] \right\}.$$

Le théorème de changement de variables en coordonnées polaires donne

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \iint_{A'} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \left( \int_1^{\frac{1}{\cos(\theta)}} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \, dr \right) d\theta.$$

4. On donne l'ensemble hachuré  $A$  ci-contre.  
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_A \frac{\cos(y)}{x^2} dx dy.$$



*Solution.* La fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{\cos(y)}{x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ ; elle est donc continue sur  $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], x \in \left[\frac{2}{\pi}, \frac{1}{y}\right] \right\}$ , ensemble fermé non borné.

Étudions l'intégrabilité de  $f$  sur  $A$  sachant que  $|f(x, y)| = f(x, y) \forall (x, y) \in A$ .

Pour  $y$  fixé dans  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ , la fonction  $g : x \mapsto \frac{\cos(y)}{x^2}$  est continue sur le fermé borné  $\left[\frac{2}{\pi}, \frac{1}{y}\right]$ . Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{2/\pi}^{1/y} \frac{\cos(y)}{x^2} dx = -\cos(y) \cdot \left[ \frac{1}{x} \right]_{2/\pi}^{1/y} = \cos(y) \cdot \left( -y + \frac{\pi}{2} \right).$$

La fonction  $h : y \mapsto \cos(y) \cdot \left( \frac{\pi}{2} - y \right)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0, \pi/2]$  fermé borné. Elle est donc intégrable sur  $]0, \pi/2]$ .

La fonction  $f$  est donc intégrable sur  $A$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\cos(y)}{x^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left( \int_{2/\pi}^{1/y} \frac{\cos(y)}{x^2} dx \right) dy = \int_0^{\pi/2} \cos(y) \left( \frac{\pi}{2} - y \right) dy \\ &= \left[ \left( \frac{\pi}{2} - y \right) \sin(y) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin(y) dy = 0 - \left[ \cos(y) \right]_0^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

5. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m^2 + 3}{m + 3}, \quad (ii) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k!}, \quad (iii) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}}.$$

*Solution.* (i) Comme le terme général de cette série ne tend pas vers 0 puisque  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^2 + 3}{m + 3} = +\infty$ , la série est divergente.

(ii) Cette série est convergente car c'est la valeur de la fonction exponentielle en  $e$ . La somme de cette série vaut donc  $\exp(e)$ .

(iii) Puisque

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^n,$$

cette série est une série géométrique de raison  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \in ]-1, 1[$  donc convergente; sa somme vaut

$$\left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 \frac{1}{1 - \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2(\sqrt[3]{2} - 1)}.$$